

Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3



Mercredi 04/12/19 9h - 12h
 Collège La Verpillière



Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3

Plan de la présentation

Format Conférence en amphi

- 1. La proportionnalité du côté des instructions officielles** - Que nous disent les programmes ? Repères de progressivité.
- 2. Champ notionnel** - Notions mathématiques sous-jacentes.
Définitions et propriétés - **Mises en situation**
- 3. Champ didactique** - Compétences mathématiques et progressivité des apprentissages.

Format atelier en salle

- **Champ didactique** : Analyse des productions des élèves – Erreurs classiques.
- **Champ pédagogique** : Mettre en œuvre son enseignement.

1. La proportionnalité du côté des instructions officielles



Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3



Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3

Exemples illustrant la notion de coefficient de proportionnalité

Ce document concerne plus particulièrement les enseignants de la dernière année du cycle 3.

Exemple 1

ÉNONCÉ
Les gâteaux mentionnés ci-dessous ont le même prix. Calculer le prix à payer pour l'achat de 10 gâteaux sachant que le coût pour 3 de ces gâteaux est de 5,40 €.

Ce premier problème vise la recherche d'une quatrième proportionnelle. On présente ici deux procédures possibles : d'une part celle du calcul, puis de l'utilisation du coefficient de proportionnalité, d'autre part celle du passage par l'unité. Si l'élève n'est pas amené à réaliser sa démarche, il est difficile de savoir laquelle de ces deux procédures il a utilisée, puisqu'elles mènent toutes deux au même calcul, à savoir $10 \times (5,40 \div 3) = 9$. Pour donner du sens aux calculs effectués, il est important d'amener les élèves à expliciter leurs procédures et à exprimer les grandeurs dans des unités.

Détermination puis utilisation d'un coefficient de proportionnalité
Le coefficient de proportionnalité est la grandeur quotient « prix à payer par gâteau ». Il a du sens pour les élèves.

Exprimé avec son unité (euro par gâteau), il vaut $5,40 \text{ €} / 3 \text{ gâteaux} = 0,90 \text{ €} / \text{gâteau}$. La grandeur « prix à payer » est le produit de la grandeur « nombre de gâteaux » par le coefficient de proportionnalité.

Si les grandeurs sont exprimées avec leurs unités, le prix de 10 gâteaux est : $10 \text{ gâteaux} \times (5,40 / 3 \text{ gâteaux}) = 10 \text{ gâteaux} \times 0,90 \text{ €} / \text{gâteau} = 9 \text{ €}$

Si les grandeurs ne sont pas exprimées avec leurs unités, le prix de 10 gâteaux est : $10 \times (5,40 \div 3) = 10 \times 0,9 = 9$

Ce seul calcul ne permet pas de donner du sens à la notion de proportionnalité

Nombre de gâteaux	3	10
Prix à payer en euros	5,40	?

Retrouvez Éduscol sur



eduscol.education.fr/novembre-2016. Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche - Mars 2014 1



Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3

Activité : Mousse au chocolat



Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3

Activité : Puzzle

THÈMES D'ÉTUDE
Proportionnalité et géométrie.

OBJECTIFS
Agrandir ou réduire une figure en utilisant des longueurs.

Énoncé

Présenter l'activité en parlant d'agrandir la figure. Ne pas parler de proportionnalité à ce stade.

Agrandir les 3 pièces de la figure de façon à ce que les segments mesurant 2 cm mesurent finalement 6 cm.

Remarque

L'enseignant veillera à ce que la reproduction de la figure ne modifie pas les longueurs des différents rectangles qui la composent. En cas de difficulté lors de la reproduction de la figure, une figure accompagnée des dimensions peut être transmise aux élèves.



La proportionnalité est une notion autour de laquelle peuvent être pensés et organisés de nombreux apprentissages mathématiques. Sa maîtrise est essentielle tant pour un usage dans la vie courante que dans le cadre professionnel. Son apprentissage est inscrit dans la durée.*

Dès le cycle 2, l'élève rencontre des situations de proportionnalité dans le cadre de la résolution de problèmes multiplicatifs. Ce travail se poursuit au cycle 3 dans chacun des 3 thèmes « Nombres et calcul », « Grandeurs et mesures » et « Espace géométrie ».

La proportionnalité

dans les programmes 2016 pour le cycle 3

Objectifs

Le cycle 3 vise à ...

- Introduire des notions nouvelles comme les nombres décimaux, la **proportionnalité** ou l'étude de nouvelles grandeurs (aires, volumes, angles, ...).
- **Reconnaitre et distinguer** des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de **proportionnalité**.

Proportionnalité au cycle 3 au croisement des 3 thèmes de mathématique

Nombres et calcul

Proportionnalité

» Reconnaître et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée.

Situations permettant une rencontre avec des échelles, des vitesses constantes, des taux de pourcentage, en lien avec l'étude des fractions décimales.

Mobiliser les propriétés de linéarité (additives et multiplicatives), de proportionnalité, de passage à l'unité.

Utiliser des exemples de tableaux de proportionnalité.



Grandeurs et mesure

Proportionnalité

Identifier une situation de proportionnalité entre deux grandeurs.

» Graphiques représentant des variations entre deux grandeurs.

Comparer distance parcourue et temps écoulé, quantité d'essence consommée et distance parcourue, quantité de liquide écoulee et temps écoulé, etc.

∩

PROBLÈME RELATIF À DES MASSES page 45
6 Dix morceaux de sucre pèsent 56 grammes.



- Combien pèsent :
- a. 20 morceaux ?
 - b. 100 morceaux ?
 - c. 110 morceaux ?
 - d. 5 morceaux ?
 - e. 25 morceaux ?
 - f. 55 morceaux ?

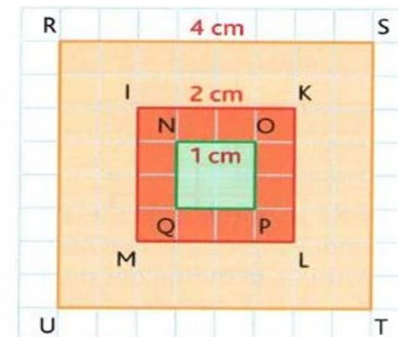
Espace et géométrie

Proportionnalité

Reproduire une figure en respectant une échelle.

» Agrandissement ou réduction d'une figure.

Reproduire une figure à partir d'un modèle (l'échelle pouvant être donnée par des éléments déjà tracés).



Repères de progressivité/ aux procédures attendues

- **Procédure** utilisant la propriété de linéarité pour l'addition. (linéarité additive)
- **Procédure** utilisant la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre. (linéarité multiplicative)
- **Procédure mixte** utilisant les propriétés de linéarité pour l'addition et de pour la multiplication par un nombre. (linéarité mixte)
- **Procédure** par le passage à l'unité (cas particulier de l'utilisation de la propriété de linéarité pour la multiplication).
- **Procédure** par l'utilisation du coefficient de proportionnalité.

Repères de progressivité Cycle 2 au Cycle 4

- **Au cycle 2**, les élèves rencontrent des situations de proportionnalité dans des problèmes multiplicatifs.
Ex. Un manuel de mathématiques pèse 120 g. Combien pèse 5 manuels identiques ?
- **Au cycle 3**, les 1ers travaux sur la proportionnalité sont proposés dès la 1^{ère} année du cycle. Les élèves ont recours aux différentes propriétés de la linéarité.
- **Au cycle 4**, toutes les procédures introduites au cycle 3 continuent à être utilisées. Des tableaux de proportionnalité sont régulièrement utilisés pour résoudre des problèmes. [...] Le produit en croix est introduit après l'étude de l'égalité des fractions. Il permet de calculer rapidement une 4^{ème} proportionnelle, quand les nombres en jeu ne permettent pas d'utiliser facilement des procédures basées sur les propriétés de linéarité.

Repères de progressivité CM1 et CM2

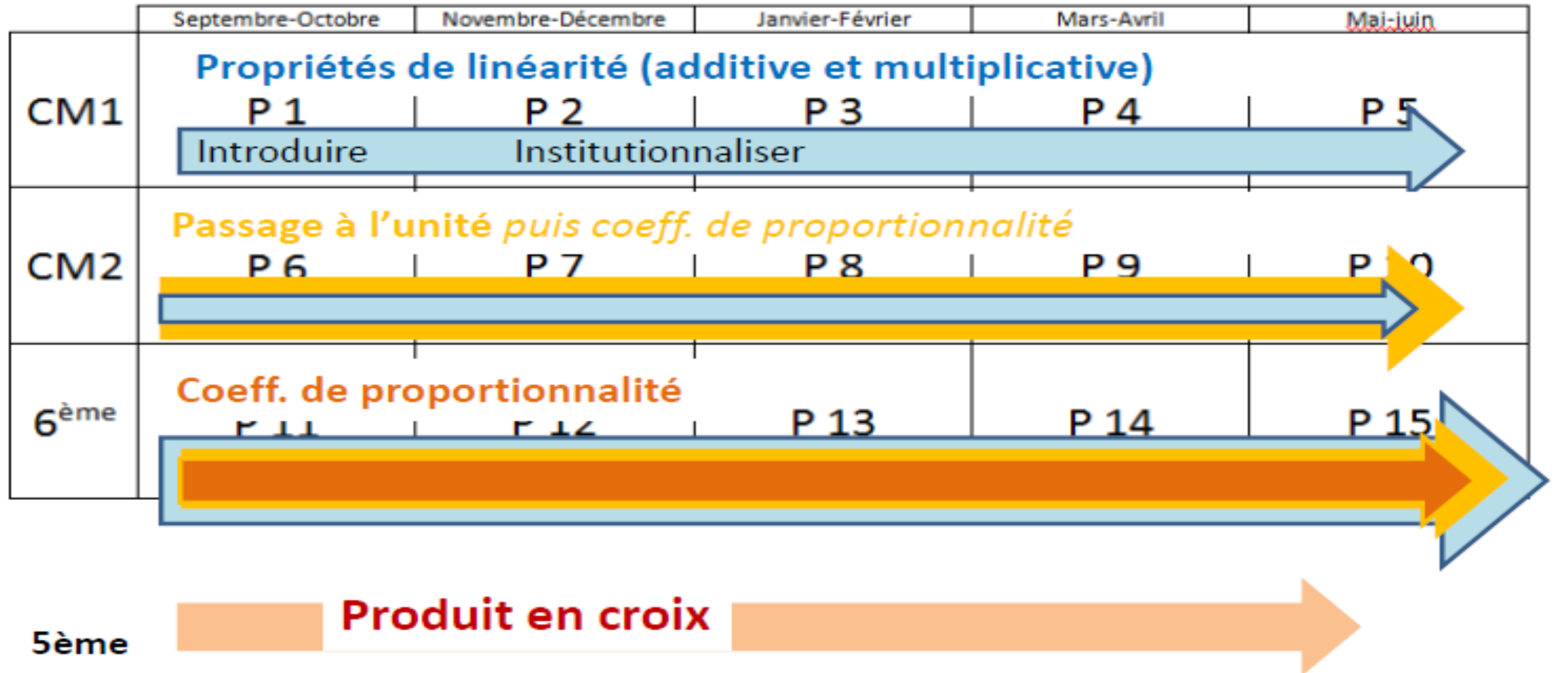
CM1

- Le recours aux propriétés de linéarité (**additive et multiplicative**) est privilégié dans des problèmes mettant en jeu des nombres entiers,
- Ces propriétés doivent être **explicitées** ; elles peuvent être institutionnalisées de façon non formelle à l'aide d'exemples. Linéarité additive : « Si 6 stylos coutent 10 euros et 3 stylos coutent 5 euros, alors 9 stylos coutent 15 euros »). Linéarité multiplicative : « Si j'ai deux fois, trois fois... plus d'invités, il me faudra deux fois, trois fois... plus d'ingrédients. »).

CM2

- Des situations impliquant des échelles ou des vitesses constantes peuvent être rencontrées,
- Le sens de l'expression « ...% de » apparait en milieu de cycle. Il s'agit de savoir l'utiliser dans des cas simples (10 %, 25 %, 50 %, 75 %) où aucune technique n'est nécessaire, en lien avec les fractions (*simples* $1/10^{\text{ème}}$ $1/4$, $1/2$, $3/4$) d'une quantité,
- En fin de cycle, l'application d'un taux de pourcentage est un attendu.

Progressivité de l'apprentissage des procédures



Diversité des contextes

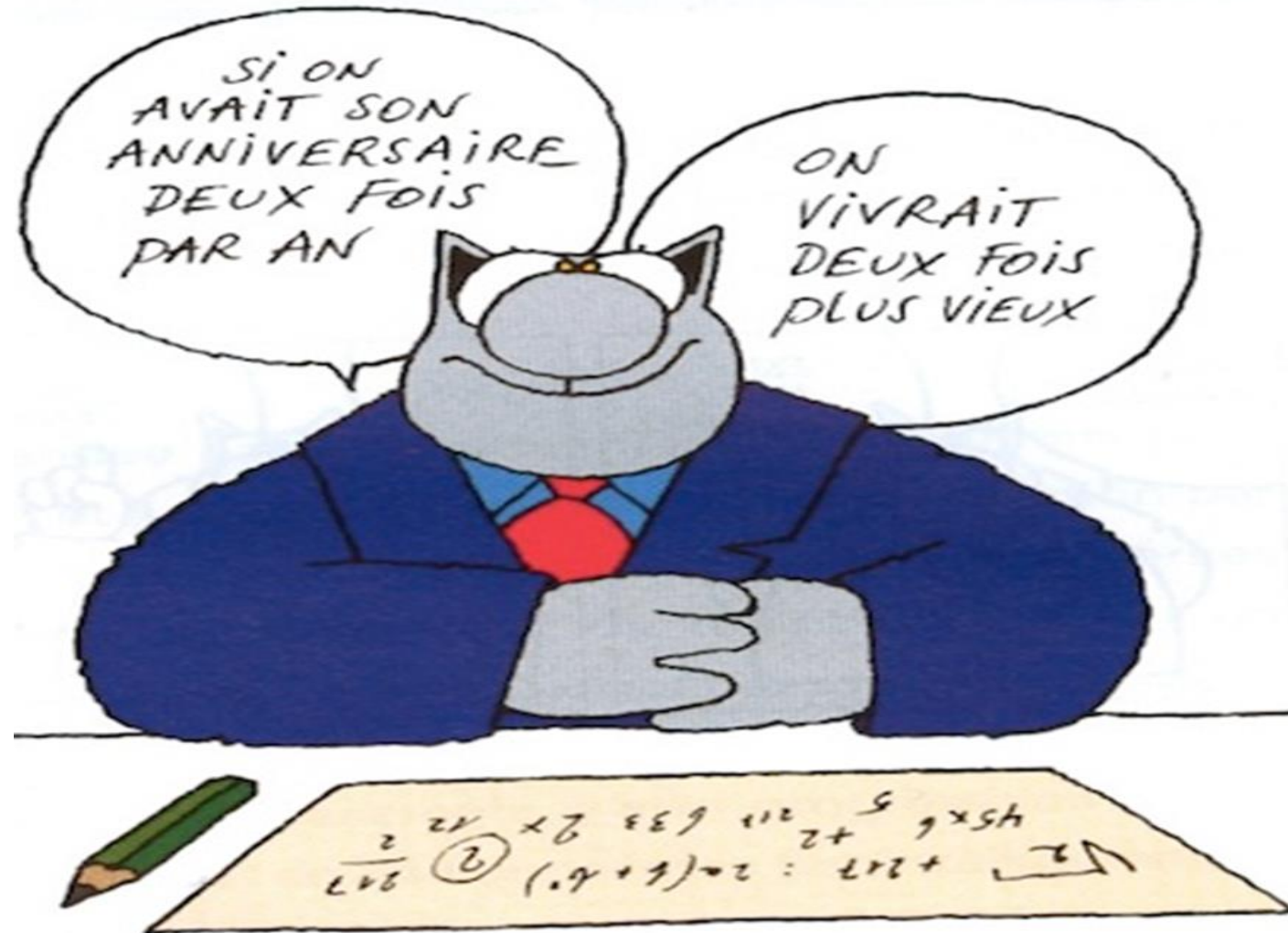
Quantités, grandeurs (taille, volume, masse) et agrandissement

	Septembre-Octobre	Novembre-Décembre	Janvier-Février	Mars-Avril	Mai-juin
CM1	P 1	P 2	P 3	P 4	P 5
CM2	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10
6 ^{ème}	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15

Vitesses constantes, agrandissement, échelles

Pourcentages simples

2. Champ notionnel - Notions mathématiques sous-jacentes. Définitions et propriétés



Comment définissez-vous une situation de proportionnalité ?

- Un problème est appelé « problème de proportionnalité » si deux grandeurs (quantités, prix, longueurs, masses...) sont en relation l'une avec l'autre et si, lorsque l'une est doublée, triplée..., l'autre est également doublée, triplée...

Cycle 3

Deux grandeurs (*ou deux suites de nombres*) sont dites proportionnelles si l'on peut passer de l'une à l'autre en multipliant par un même nombre non nul. Ce nombre s'appelle le coefficient de proportionnalité.

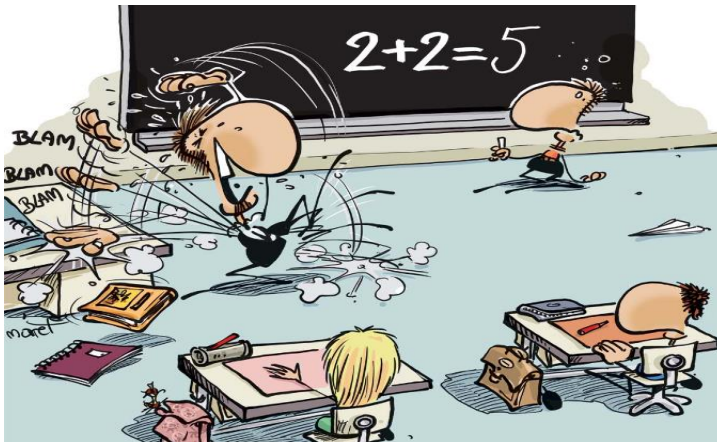
Cycle 4

Poires (kg)	2	10	15	20	2,5	7,5
Prix (€)	3,2	16	24	32	4	12

Situation proportionnelle ou non ?

Pour un groupe de 7 élèves, un PE en exercice perd 1,4 l de sueur par jour... Pour 3 élèves, il en perd 0,6 l, combien en perd-il pour 10, pour 21, pour 30 élèves ? Oui ...mais non

Nombre d'élèves	7	3	10	21	30	1
Quantité de sueur dépensée (L)/jour	1,4	0,6	2	4,2	6	0,2

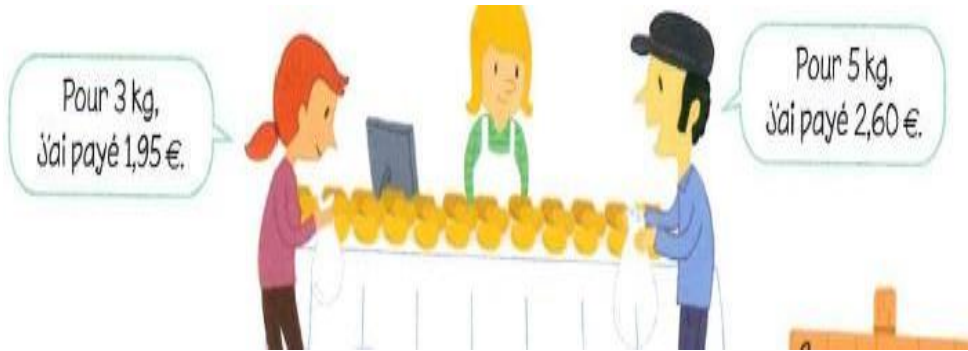


Non

Si tu mesures 1 mètre à 10 ans, combien est-ce que tu mesureras à 20 ans ? Et à 40 ans ?

Situations proportionnelles ou non ?

Situation 1



Non

Situation 2

a.

Poires (kg)	2	10	15	20	2,5	7,5
Prix (€)	3,2	16	24	32	4	12

Oui

b.

Temps de marche (en min)	60	90	120	30	150
Distance (en km)	6	12	15	3	18

Non

Situation 3

Arthur fait le tour du lac en courant.
Il fait les premiers 200 mètres en 3 minutes.
On peut en déduire qu'il fera le tour du lac en 15 min.

Si la vitesse est constante : oui


Tour du lac : 1 km

Plusieurs cadres pour étudier les situations relevant de la proportionnalité

- **Le cadre numérique** *procédures de calcul liées à la linéarité, ou à la recherche du coefficient de proportionnalité (tableaux, listes de nombres)*
- **Le cadre graphique** : *représentation de la fonction linéaire : points alignés sur une droite passant par l'origine du repère*
- **Le cadre géométrique** : agrandissement, réduction de figures (conservation des angles, du parallélisme, des rapports de longueurs *(homothéties et similitudes)*)

Le cadre numérique

Nombre de bonbons	3	15	1
Prix à payer	2,46	12,30	0,82

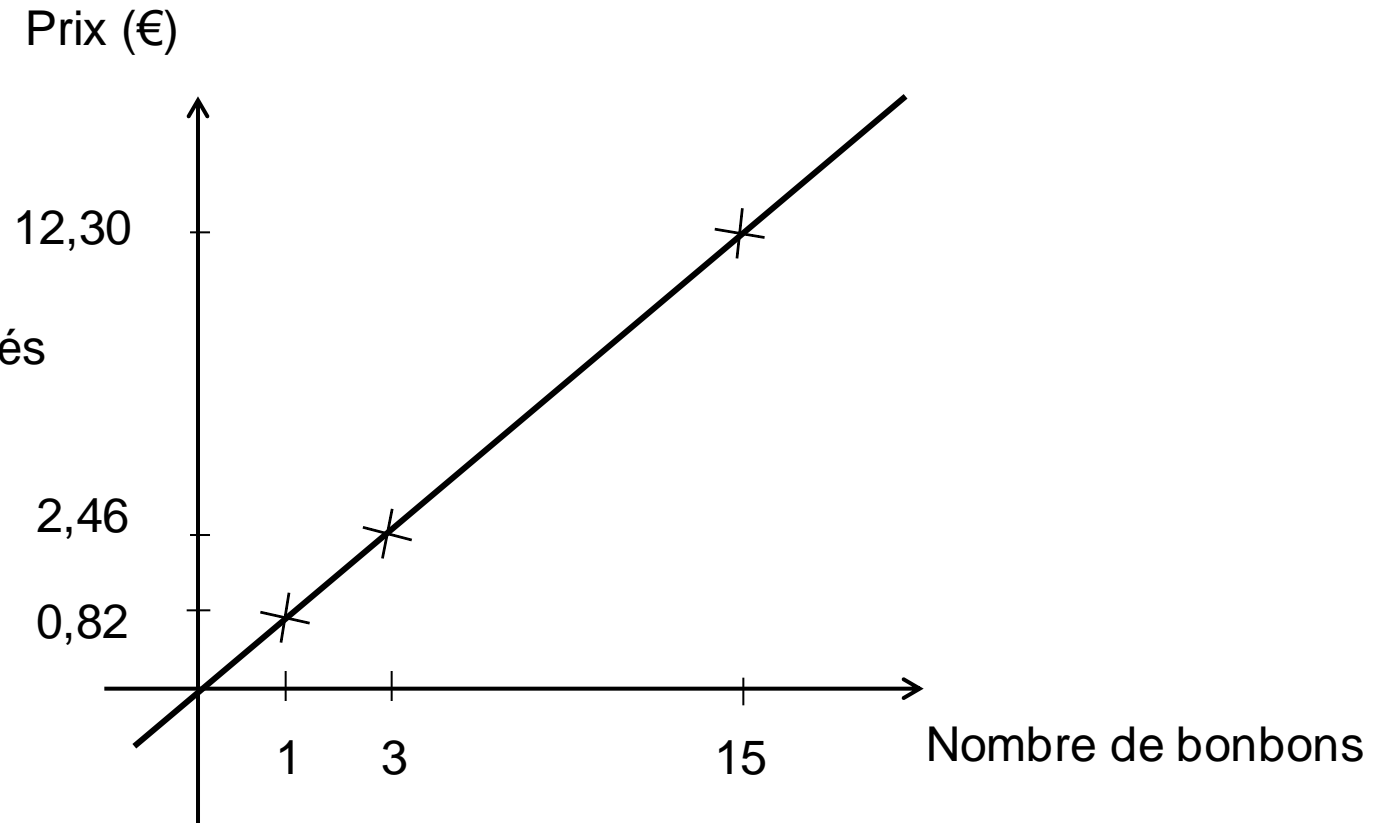


× 0,82

Le cadre graphique

$$Y = f(x) = 0,82X$$

Les points sont alignés
sur une droite qui
passe par l'origine...



Le cadre géométrique

Agrandissements/ Réductions de figures



édusCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Proportionnalité

Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3 Activité : Puzzle

THÈMES D'ÉTUDE
Proportionnalité et géométrie.

OBJECTIFS
Agrandir ou réduire une figure en utilisant des longueurs.

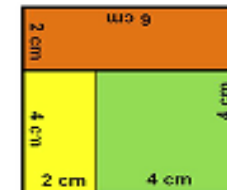
Énoncé

Présenter l'activité en parlant d'agrandir la figure. Ne pas parler de proportionnalité à ce stade.

Agrandis les 3 pièces de la figure de façon à ce que les segments mesurant 2 cm mesurent finalement 4 cm.

Remarque

L'enseignant veillera à ce que la reproduction de la figure ne modifie pas les longueurs des différents rectangles qui la composent. En cas de difficulté lors de la reproduction de la figure, une figure accompagnée des dimensions peut être transmise aux élèves.



Propriétés de linéarité qui sous-tendent les calculs sur la proportionnalité

Propriété de linéarité pour l'addition : $f(a + b) = f(a) + f(b)$: le prix « de a et b » sucettes est égal au prix de « a » sucettes + le prix de « b (3) » sucettes.

Propriété de linéarité pour la multiplication : $f(3a) = 3f(a)$: le prix de 3 fois « a » sucettes est égal à 3 fois le prix de « a » sucettes.

Propriété mixte alliant les 2 précédentes : $f(3a + 3b) = 3f(a) + 3f(b)$: le prix de 3 fois 'a' sucettes et (+) 3 fois 'b' carambars est égal à 3 fois le prix de a sucettes et (+) de 3 fois le prix de b carambars.

Vocabulaire d'explicitation

Eduscol* :

« *Différencier le vocabulaire des structures (de linéarité) additives : « **de plus** » et de « **de moins** » de celui des structures (de linéarité) multiplicatives : « **fois plus** » et « **fois moins** ».*

**Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3*

En résumé...différentes procédures

1. L'utilisation des propriétés de linéarité (rapport interne) :

Ex : « 3 stylos coutent 10 euros donc 9 stylos coutent 3 fois plus : 27 euros. »

2. La recherche de la « valeur de l'unité » (rapport interne) Ex: « 3 stylos coutent 9 euros, je cherche le prix unitaire d'un stylo c'est 9 tiers de 1 euro = 3 puis je multiplie ce prix unitaire par 7 (7 fois 3 = 21), 7 stylos coutent 21 euros

3. L'utilisation du « coefficient » de proportionnalité (rapport externe) Ex : « pour passer de 3 stylos à 9 euros, je multiplie par 3 euros par stylo, qui est le coefficient de proportionnalité »

3	9
9	?

1

3	9
7	?
1	?

2

3	9
9	?

3

Mise en situation 1

Chaque binôme/trinôme résout 4 énoncés de problèmes de proportionnalité :

Consignes :

- **Résolvez chacun des problèmes puis classez les selon leur niveau de difficulté en justifiant votre choix.**
- **Quelles sont vos procédures « réflexes »? Y en a-t-il d'autres? Quelles propriétés mathématiques utilisez-vous?**

Sachant que 4 stylos valent 2 euros,
combien valent 8 stylos?

Sachant que 4 stylos valent 2,42 euros,
combien valent 8 stylos?

Sachant que 4 stylos valent 2 euros,
combien valent 14 stylos?

Sachant que 4 stylos valent 2,42 euros,
combien valent 14 stylos?

La proportionnalité : Mise en situation 1

Des situations proches mais des difficultés de résolution significativement différentes.

Sachant que 4 stylos valent 2 euros, combien valent 8 stylos ?

Rapport interne simple = 2
Rapport externe simple = 0,5



Si 4 stylos valent 2 euros, 8 stylos, c'est 2 fois plus de stylos, donc 2 fois plus d'euros, soit 4 euros.

Linéarité multiplicative

Sachant que 4 stylos valent 2,42 euros, combien valent 8 stylos ?

Rapport interne simple = 2
Rapport externe complexe = 0,605



8 stylos c'est 4 stylos de plus donc 2,42 euros de plus, soit 4,84 €.

Linéarité additive

Sachant que 4 stylos valent 2 euros, combien valent 14 stylos ?

Rapport interne complexe = 3,5
Rapport externe simple = 0,5



4 stylos valent 2 euros, 2 euros c'est deux fois moins que 4 stylos. Pour 14 stylos, je calcule deux fois moins que 14.

Linéarité multiplicative

4 stylos valent 2 euros : 1 stylo vaut 0,50 cts.

14 stylos valent 7 euros.

Passage à l'unité

Sachant que 4 stylos valent 2,42 euros, combien valent 14 stylos ?

Rapport interne complexe = 3,5
Rapport externe complexe = 0,605



Si 4 stylos valent 2,42 euros, 8 stylos, c'est deux fois plus de stylos, ils valent deux fois plus d'euros, soit 4,84 euros. 12 stylos valent la somme des 2 montants, soit 7,26 euros. 2 stylos valent deux fois moins que 4 stylos, soit 1,21 euros. 14 stylos valent la somme des 2 montants, soit 8,47 euros.

Linéarité mixte (multiplicative puis additive)

Résolution de problème ... de proportionnalité

Du Cycle 1

1	8
3	?

1	8
?	56

4	32
1	?

au Cycle 2

multiplication

Dans une boîte, il y a 8 feutres,
combien de feutres dans 3 boîtes ?

division quotient

Dans une boîte, il y a 8 feutres,
combien de boîtes pour avoir 56 feutres ?

division partition

Avec 4 boîtes identiques on a 32 feutres,
combien de feutres dans une boîte ?

et Cycle 3

boîtes	1	3
feutres	8	?

boîtes	1	?
feutres	8	56

boîtes	4	1
feutres	32	?

Mise en situation 2

- Chaque binôme/trinôme résout 4 énoncés de problèmes de proportionnalité :

A partir de productions d'élèves (avec résultats corrects), repérer les différentes procédures utilisées :

1. Linéarité de l'addition
2. Linéarité de la multiplication
3. Procédure mixte
4. Procédure de passage à l'unité
5. Coefficient de proportionnalité

Linéarité additive

1.1

1.2

2.1

3.2

Linéarité multiplicative

3.1

4.1

4.2

Linéarité mixte

5.1

5.2 ?

Passage à l'unité

2.2

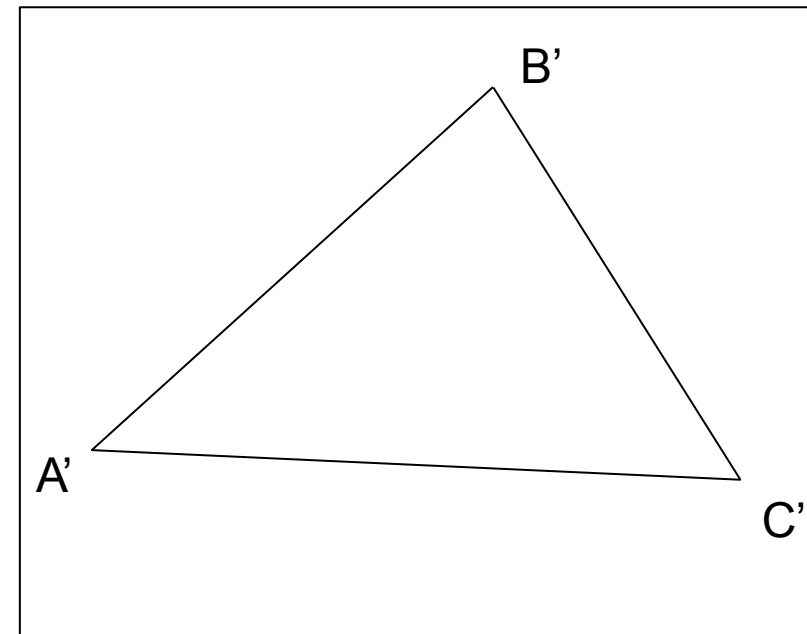
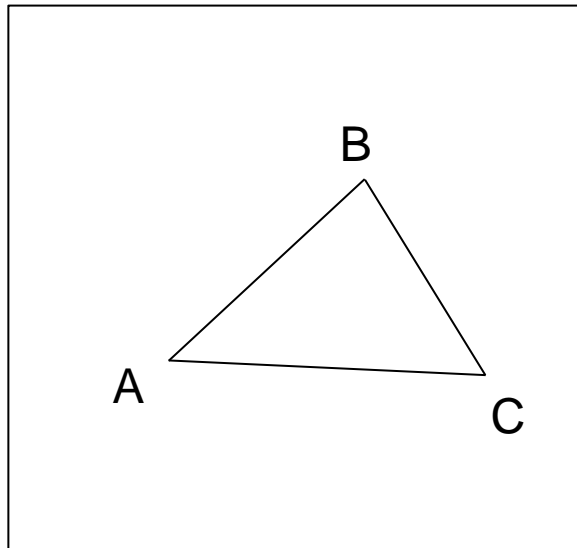
6.1

6.2 ?

6.3 ?

Proportionnalité en géométrie

Agrandissement – réduction



Doc. eduscol



éduscol Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche et de l'Innovation CYCLES 2 3 4
MATHÉMATIQUES
Proportionnalité

Résoudre des problèmes de proportionnalité au cycle 3
Activité : Puzzle

NIVEAUX D'ÉTUDES
Proportionnalité en géométrie.
OBJECTIFS
Agrandir ou réduire une figure en utilisant des longueurs.

Énoncé
Présenter l'activité en partant d'agrandir la figure. Ne pas parler de proportionnalité à ce stade.

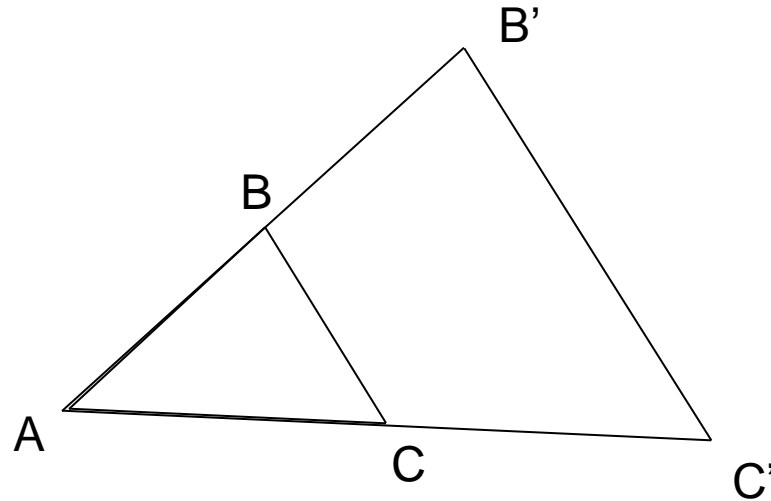
Agrandir les 3 pièces de la figure de façon à ce que les segments mesurent 2 cm mesurent finalement 4 cm.

Remarque
L'enseignant veillera à ce que la reproduction de la figure ne modifie pas les longueurs des différents rectangles qui la composent. En cas de difficulté lors de la reproduction de la figure, une figure accompagnée des dimensions peut être transmise aux élèves.



Proportionnalité en géométrie

THALES



$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'} = \text{Coefficient de réduction ou d'agrandissement}$$

3. Champ didactique

- Compétences mathématiques et progressivité des énoncés

Chercher

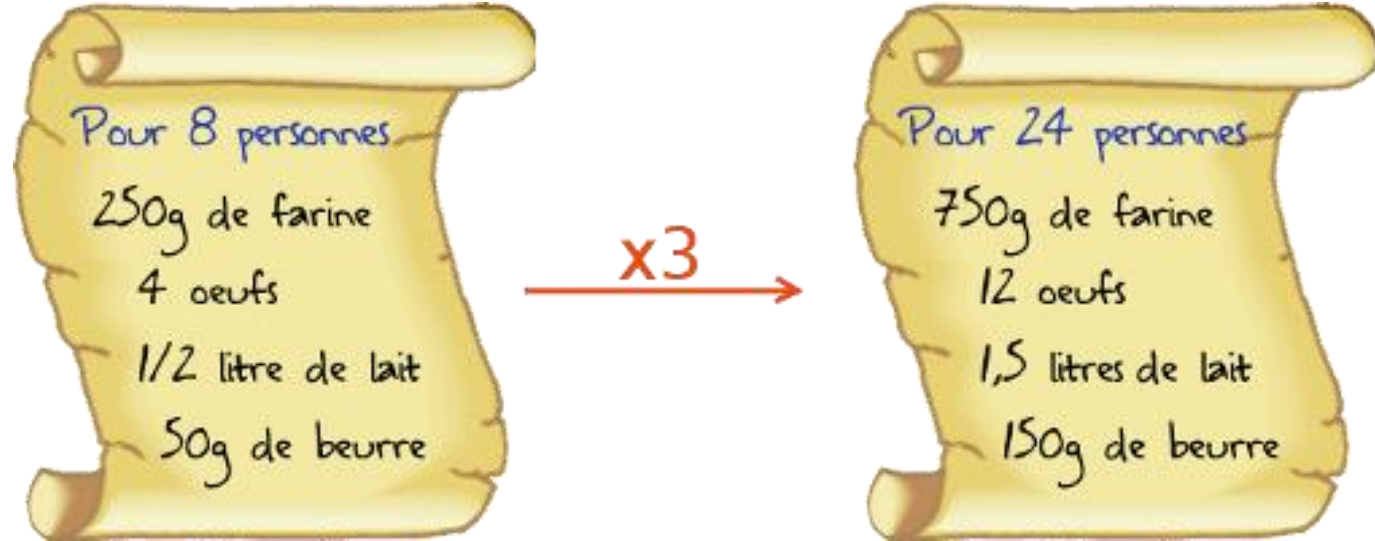
Modéliser

Représenter

Raisonnement

Calculer

Communiquer



La proportionnalité au cœur des 6 compétences
mathématiques

Chercher

Modéliser

Représenter

Raisonner

Calculer

Communiquer

Progressivité à partir d'un énoncé « On dispose d'un sac de billes identiques. On connaît la masse de 3 billes (51g) et de 5 billes (85g) »

- **Début CM1** : linéarité somme et différence « Quelle est la masse de 8 billes ? de 2 billes ? »
- **Fin CM1** : linéarité somme / différence / double et mixte (facile à identifier) « Quelle est la masse de 6 billes ? de 10 billes ? de 13 billes ? de 7 billes ? »
- **Début CM2** : linéarité somme / différence / multiple / diviseur / mixte
« Quelle est la masse de 21 billes ? de 28 billes ? de 500 billes ? de 250 billes ? 125 billes ? »
- **Fin CM2** : linéarité et passage à l'unité « Quelle est la masse de 20 billes ? de 21 billes ? de 1 bille ? de 87 billes ? »
- **6^{ème}** : linéarité / passage à l'unité / coefficient de proportionnalité / tableau de proportionnalité. Résumer sous forme de tableau la situation de la masse des billes en sachant faire apparaître les opérations de linéarité et le coefficient de proportionnalité.

Conclusion

Quelques points essentiels pour l'enseignement de la proportionnalité :

- 1. Notion à développer sur le long terme (cycle 2 - cycle 3 - cycle 4).**
- 2. L'élève doit identifier si une situation est bien proportionnelle ou pas (le tableau ne suffit pas).**
- 3. Progressivité dans les procédures attendues (linéarité puis passage à l'unité puis coefficient de proportionnalité).**
- 4. Jouer sur les variables « numériques » (taille des nombres / rapport interne / rapport externe / nature des nombres).**

Conclusion

5. Insister sur l'oral (explicitation et confrontation).

6. Multiplier les contextes (vie courante et problèmes mathématiques) :

- Jouer sur l'interdisciplinarité (EPS, géographie, histoire, sciences, technologie...).
- Impliquer les élèves (vie de tous les jours) et faire résoudre des problèmes « concrets » (cf. site 'm@ths en-vie').

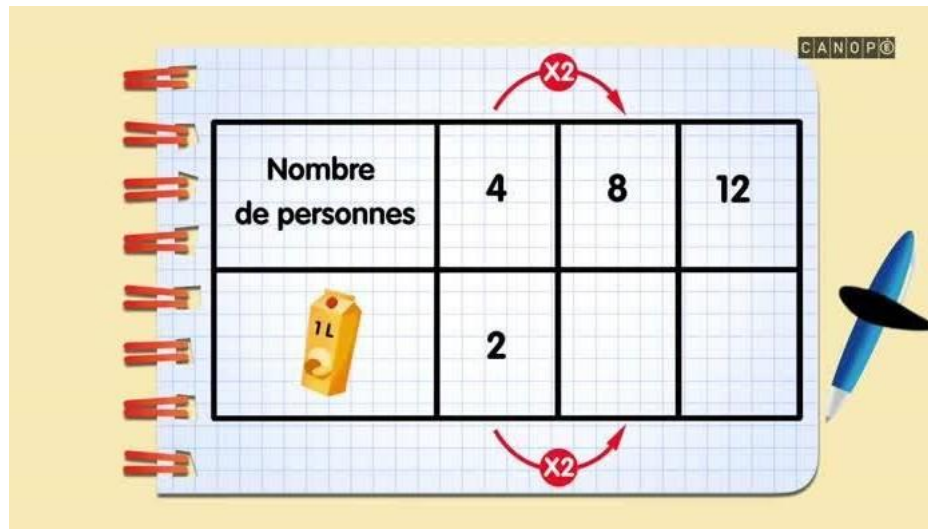
6. Confronter proportionnalité et non proportionnalité.

7. Eviter l'utilisation systématique de tableaux.

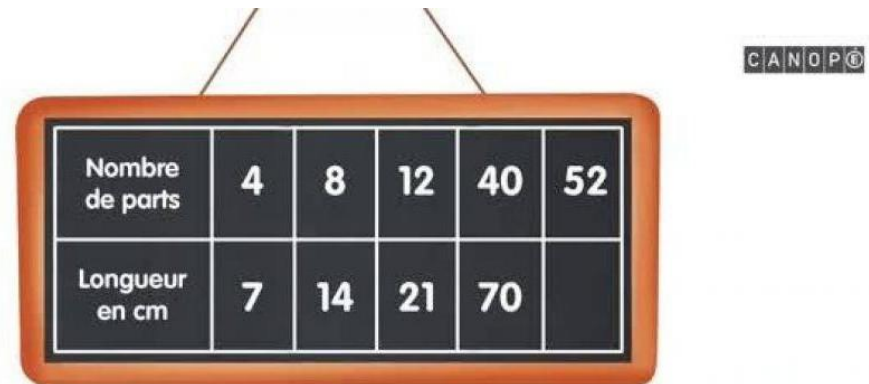
Un outil : grille d'analyse d'un problème de proportionnalité

Ressources

Les Fondamentaux de Canopé



Nombre de personnes	4	8	12
1L	2		



Nombre de parts	4	8	12	40	52
Longueur en cm	7	14	21	70	



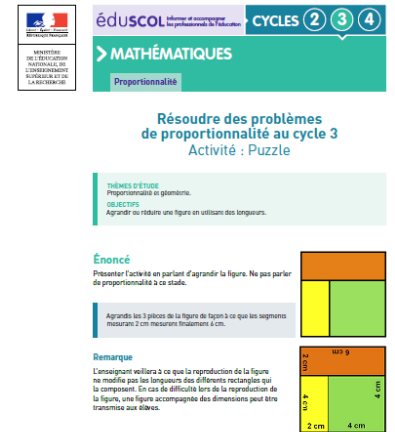
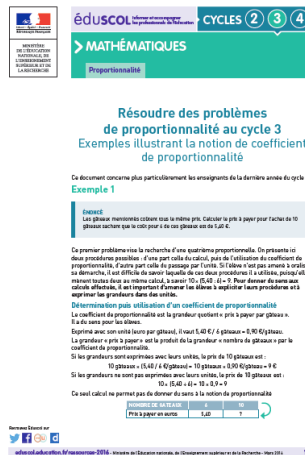
Fiche pédagogique

Ressources

M@ths en-vie : les maths ancrés dans la vie quotidienne :
Banque de problèmes, [la proportionnalité](#)



Eduscol



MERCI

